AHMET YESEVİ ÜNİVERSİTESİ

Ad Soyadı **:** Fahri Dönmez

Şube No **:** TBIL-102-03

Öğrenci No **:** 122132151

Bölüm **:** Bilgisayar Mühendisliği

Matematik II

Fourier Serileri

Prof. Dr. Ahmet Arıkan

Fourier Serileri

2L periyodlu bir $f(x)$ fonksiyonunun, fourier serileri veya Fourier açılımı,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1.2.1)$$

şeklindeki bir trigonometrik seri ile tanımlanır, a_0, a_n ve b_n $(n=1,2,\dots)$ Fourier katsayıları olarak adlandırılır.

$f(x)$ fonksiyonu 2L periyodlu, $(-L, L)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun bir Fourier serisine açılabilmesi için aşağıdaki Dirichlet şartlarını sağlaması gerekir:

a) $f(x)$ fonksiyonu, $(-L, L)$ aralığında sürekli veya parçalı süreklidir.

b) $f(x)$ fonksiyonunun bir periyod içindeki maksimum ve minimumları, sonlu sayıda olmalıdır. ($f'(x)$ türevi parçalı sürekli olabilir).

c) $f(x)$ fonksiyonunun bir periyod aralığındaki mutlak integrali,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = \text{sonlu} < \infty \qquad \text{olmalıdır.}$$

Dirichlet Teoremi

$(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanan 2π periyodlu $f(x)$ fonksiyonu, Dirichlet şartlarını sağlıyorsa, $(-\pi, \pi)$ aralığında (1.2.1) Fourier serisine açılabilir ve Fourier serisi,

1) $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu noktalarda (aralığın içinde) $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak,

2) $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalarda,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \qquad \text{değerine yakınsak,}$$

3) Aralığın $x=-\pi$, $x=\pi$ uç noktalarında,

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \qquad \text{değerine eşit olur.}$$

Böylece $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1.2.2)$$

şeklinde gösterilir.

Fourier Katsayılarının Hesaplanması

a_0 Katsayısının Hesabı

(1.2.2) serisinin her iki tarafının $[-\pi,\pi]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0\pi$$ olduğundan, a_0 katsayısı,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad (1.2.3)$$ olarak bulunur.

a_n Katsayısının Hesabı

(1.2.2) serisinin her iki tarafını $\cos nx$ ile çarpar ve $[-\pi,\pi]$ aralığında integralini alırsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos nx\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \cos nx\,dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nx\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx\,dx + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos nx\,dx}_{0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx\,dx = \frac{a_n}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$= a_n\pi$ olduğundan, a_n katsayısını,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$ olarak buluruz. (1.2.4)

b_n Katsayısının Hesabı

(1.2.2) serisinin her iki tarafını $\sin nx$ ile çarpar ve $[-\pi,\pi]$ aralığında integralini alırsak, b_n katsayısı,

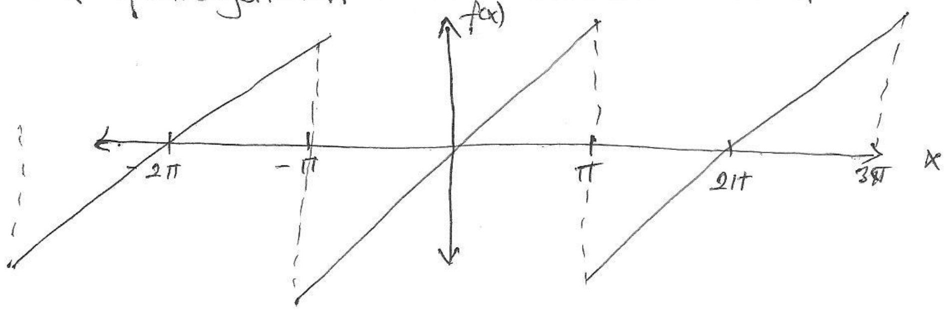
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (1.2.5)$$ olarak bulunur.

Böylece (1.2.2) Fourier serisinde, katsayılar $n=0,1,2,\ldots$ için,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx ,$$ olarak bulunur.

Örnek : Şekilde verilen $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış 2π periyodlu $f(x)=x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.



Çözüm: Verilen fonksiyon $(-\pi,\pi)$ aralığında sürekli, fakat üç noktada süreksizdir. Bu noktalarda $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 \qquad f(\pi)=0$$ değerlerini alır.

Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0 \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -(-1)^n\frac{2}{n}$$ dir. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun

Fourier seri açılımı, $$f(x)=x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right),$$

$(-\pi<x<\pi)$ olarak bulunur. $x=\pm\pi$ için seri $f(x)$ fonksiyonunun değerine değil de, $f(x)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan aldığı değerlerin ortalaması

Fourier Kosinüs Ve Fourier Sinüs Serileri

Tek Ve Çift Fonksiyonlar

Bir $f(x)$ fonksiyonu $(-a,a)$ aralığında

1. $f(-x)=-f(x)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna tek fonksiyon denir ve

$$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 0 \text{ dır.}$$

Örneğin, $x^3, x^3-3x^3, \sin x, \tan 3x \ldots$ fonksiyonları tek fonksiyondur.

2. $f(-x)=f(x)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna çift fonksiyon denir ve

$$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \text{ dır.}$$

Örneğin: $x^4, 2x^6+4x^2+5, \cos x, e^x+e^{-x}, \ldots$ fonksiyonları çift fonksiyondur.

Fourier Kosinüs Serisi

$f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Çift fonksiyonun Fourier serisi; $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (1.3.1) şeklindedir. Bu seriye kosinüs serisi denir. Çift fonksiyon fourier serisinde yalnız kosinüs terimleri bulunur.

Fourier Sinüs Serisi

$f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \text{ olarak bulunur.}$$

Tek fonksiyonun Fourier serisi; $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ dır. (1.3.2)

Bu seriye fourier sinüs serisi denir. Yalnız sinüs terimleri bulunur.

Örnek: $(-\pi,\pi)$ aralığında,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0,\ x=\pm\pi\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan 2π periyodlu fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: $f(-x)=-f(x)$ eşitliği sağlandığından, $f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur. Buna göre fourier serisi,

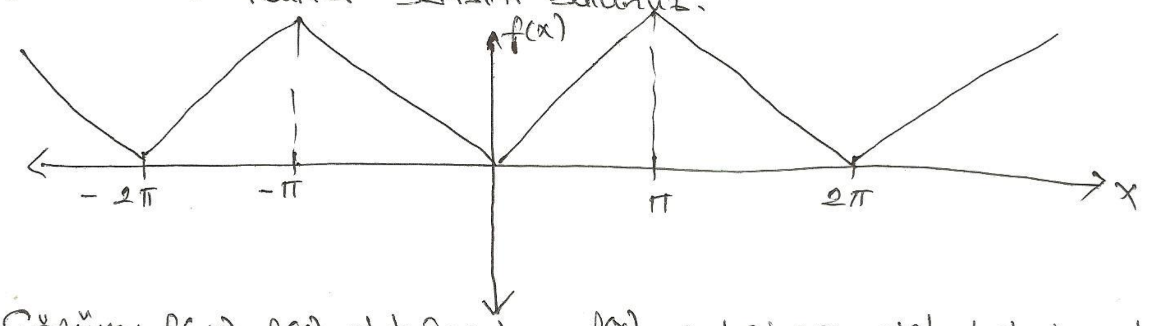
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$ şeklinde olmalıdır. Fourier katsayıları,

$$a_0=0\ ,\ a_n=0 \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n \text{ çift ise}\\ \frac{4}{\pi}, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olarak bulunur. O halde $f(x)$ fonksiyonunun fourier seri açılımı,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\dots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\dots\right)$$ bulunur.

Örnek: Şekildeki $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış 2π periyodlu $f(x)=|x|$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.



Çözüm: $f(-x)=f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur. $f(x)=x$ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında kosinüs serisi açılımı,

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos nx$$ olacaktır. Fourier katsayıları,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\pi \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n \text{ çift ise}\\ \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & n=2k+1,\ k=1,2,\dots\end{cases}$$

Böylece ;

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \dots\right)$$

elde edilir. Bu seride $x=0$ için $f(0)=0$ olduğundan

$\pi^2 = 8\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\dots\right)$ eşitliği bulunur.

Yarım Aralıkta Fourier Sinüs ve Fourier Kosinüs Serileri

Bir yarım aralıkta Fourier sinüs veya kosinüs serisinde sadece sinüs terimleri veya sadece kosinüs terimleri bulunur. Bir fonksiyona yarım aralıkta karşılık gelen Fourier serisi istenirse fonksiyon genel olarak $(0,\pi)$ aralığında tanımlanır ve tek veya çift olarak sınıflandırılır. Böylece aralığın diğer yarısı olan $(-\pi,0)$ aralığına da tanımlanmış olur. Verilen aralığa göre Fourier katsayılarını bulalım.

I. $(-\pi,\pi)$ aralığında Fourier açılımı için Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

formülleri ile hesaplanır. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise, yine $(-\pi,\pi)$ aralığında $n=1,2,\dots$ için Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = 0$$ olacaktır.

Eğer $f(x)$ tek fonksiyon ise, $(-\pi,\pi)$ aralığında $n=1,2,\dots$ için Fourier katsayıları

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$ olacaktır.

II. Eğer verilen fonksiyonun $(0,2\pi)$ aralığındaki Fourier seri açılımı isteniyorsa, Fourier katsayıları,

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

olur.

III. Aralık $(0,2L)$ olduğu zaman, Fourier katsayılarını bulmak için $\varepsilon=\frac{\pi x}{L}$ değişken değiştirmesi yapılır. Bu durumda $\phi(\varepsilon)=f(x)$ ve $0\le\varepsilon\le 2\pi$ alınarak, $\phi(\varepsilon)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varepsilon+b_n\sin n\varepsilon)$ olur.

Burada;
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\varepsilon).\cos(n\varepsilon).\,d\varepsilon$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\varepsilon).\sin(n\varepsilon).\,d\varepsilon$$ olarak tanımlanır.

Yerine yazdığımızda:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}.dx \qquad b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}.dx$$

Fourier Serisi: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ olur.

IV. Aralık $(-L,L)$ olduğu zaman, Fourier katsayılarını bulmak için yine $\varepsilon=\frac{\pi x}{L}$ değişken değiştirmesi yapılır. Fourier katsayıları;

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$ olur.

Fonksiyon Çift ise; $a_0=\frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\,dx$, $a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}.dx$ $b_n=0$

Fonksiyon Tek ise: $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$ bulunur.

V. Aralık $(c, c+2L)$ ise Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)\,dx \;,\quad a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx ,\quad b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Örnek: $(0,\pi)$ aralığındaki $f(x)=x^2$ fonksiyonunun Fourier sinüs ve Fourier kosinüs seri açılımlarını bulunuz.

Çözüm:

i) $f(x)=x^2$ fonksiyonunun orjine göre simetriğini alarak $(-\pi,0)$ aralığına uzatırsak, $(-\pi,\pi)$ aralığında 2π periyodlu tek fonksiyon elde etmiş oluruz. Bu fonksiyonun Fourier katsayıları,

$$a_0=0 \;,\quad a_n=0 \;,\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = 2\,\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{4\left[(-1)^n-1\right]}{n^3\pi}$$

Sinüs Serisi, $x^2 = 2\pi\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 3x}{3^3} + \cdots\right)$

$x=0$, $x=\pi$ fonksiyonun ve serinin değeri sıfır.

ii) $f(x)=x^2$ fonksiyonun Oy eksenine göre simetriğini alarak $(-\pi,0)$ aralığına uzatalım. Fonksiyon çift olduğundan, fourier kosinüs serisine açılır. Katsayılar;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3} \,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$b_n = 0$ bulunur.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{olur.}$$

$x=0$ için serinin toplamı $f(0)=0$ olduğundan.

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots \quad \text{olarak bulunur.}$$

Kompleks Fourier Serileri

Fourier serisinde, trigonometrik fonksiyonlar yerine üstel kompleks eşlenik fonksiyonları kullanarak seri açılımlarını basitleştirebiliriz.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad 1.4.1$$

Fourier serisini üstel şekle getirmek için,

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx \qquad 1.4.2$$

$$e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx \qquad 1.4.3$$

Denklemleri taraf tarafa toplar ve 2 ile bölersek,

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}) \qquad 1.4.4$$

Denklemleri taraf tarafa çıkartıp 2i ile bölersek

$$\sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx}) \quad \text{olur.}$$

$$\frac{1}{i}=-i \quad \text{den}$$

$$a_n\cos nx+b_n\sin x=\frac{1}{2}a_n(e^{inx}+e^{-inx})+\frac{1}{2i}b_n(e^{inx}-e^{-inx})$$

$$=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{inx}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-inx}$$

$$C_n=\frac{a_n-ib_n}{2} \quad \text{ve} \quad C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

$$a_n\cos nx+b_n\sin x=c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx} \qquad c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx})$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_{-n}e^{inx}$$

şeklinde yazılır.

$$f(x)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$$

Burada $f(x)$ fonksiyonunun, kompleks Fourier serisi ve c_n ye ise $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier katsayısı denir.

2L periyodlu bir fonksiyon için kompleks Fourier serisi ve kompleks Fourier katsayısı,

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

$$n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\,dx$$

olur.

Örnek: $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$ ve $f(x+2\pi)=f(x)$ olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: Kompleks Fourier katsayısı: $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$$

Son olarak $2\sinh\pi$ ifadesini kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisini,

$$e^x=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}\qquad(-\pi<x<\pi)$$

şeklinde elde ederiz.