AHMET YESEVİ ÜNİVERSİTESİ

Ad Soyad : Fahri Dönmez
Şube No : TBIL-101-01
Öğrenci No : 12213251
Bölüm : Bilgisayar Mühendisliği

Sonsuzda Limitler

MATEMATİK –I
Prof. Dr. Ahmet Arıkan

1. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \iff$ Nasıl tanımlanır?

Tanım: $X \subseteq R$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.

$f: X \to R$

bir fonksiyon olsun. Eğer her B sayısı için

$$(x \in X \text{ ve } x > A) \Rightarrow f(x) > B$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x sonsuza gittiğinde $f(x)$ sonsuza ıraksar (ya da gider)" denir. Bu durumda,

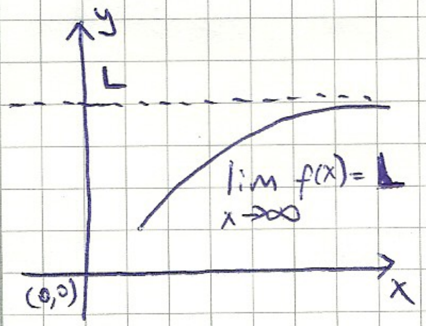
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

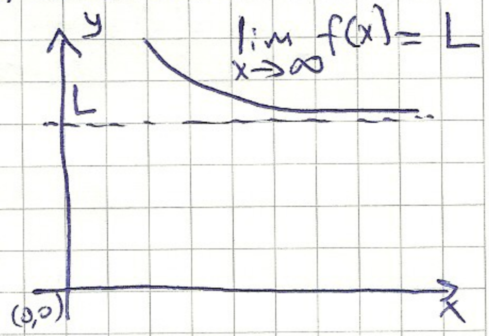
yazarız.

KeskinColor

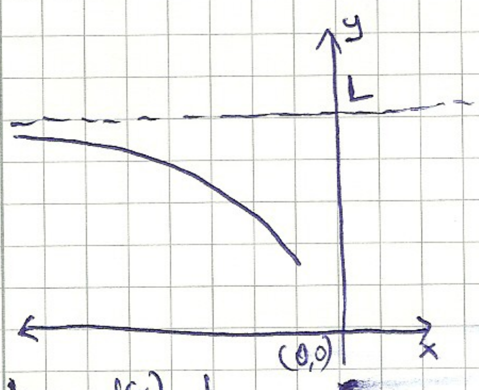
2. Her bir tanıma ilişkin tanımı açıklayan bir RESİM çiziniz (grafik vb).

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff$ Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için öyle bir M reel sayısı vardır ki her $x > M$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ dur.

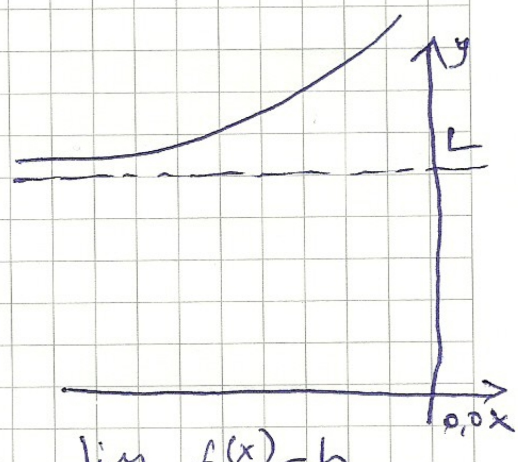




2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff$ Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için öyle bir N reel sayısı vardır ki her $x < N$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ dur.

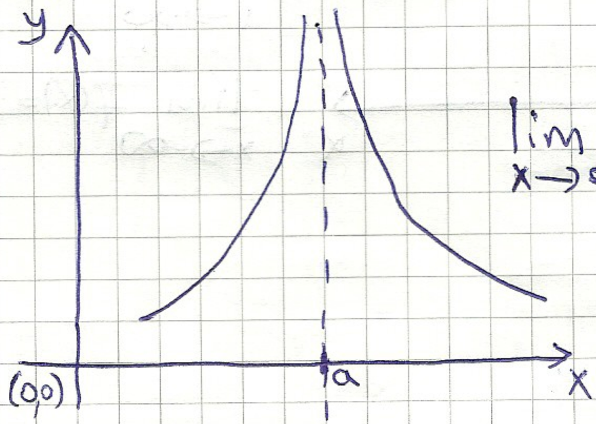


$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$



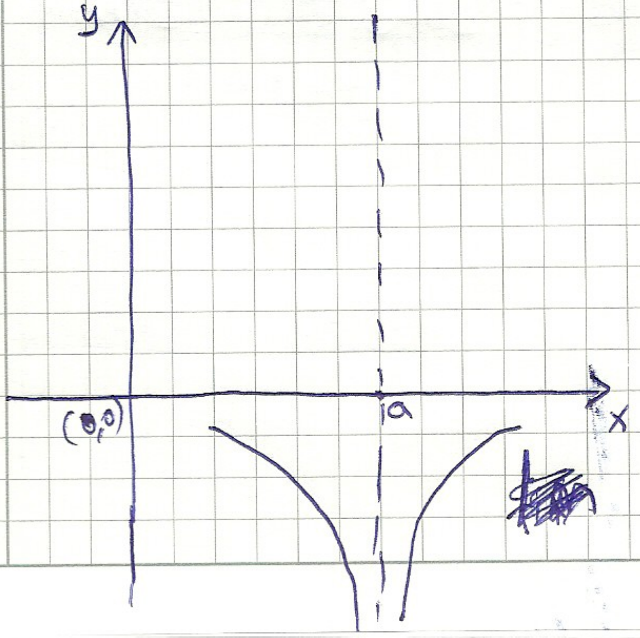
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \iff$ Her $N > 0$ reel sayısı için $0 < |x-a| < \delta$ iken $f(x) > N$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.



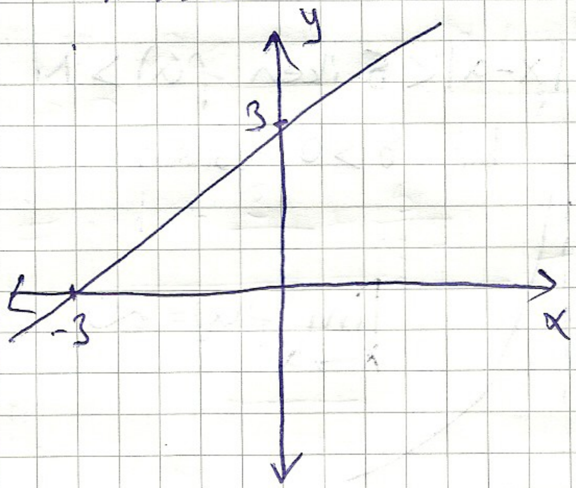
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff$ Her K reel sayısı için $0 < |x-a| < \delta$ iken $f(x) < K$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

5. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$



$f(x) = x + 3$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

– içinde sonsuzluk bulunan 10 tane limit örneği:

1- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-5}{x^3+5}$ limiti?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5}{x^3+5} = \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1-\frac{5}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{1}{\infty} \cdot \left(\frac{1-\frac{5}{\infty^2}}{1+\frac{5}{\infty^3}}\right)$$

$$= 0 \cdot \frac{(1-0)}{(1+0)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0 //$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+3x+5}{3x+4}$ limit ?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+3x+5}{3x+4} = \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)} = \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \frac{\infty^2 \cdot \left(1+\frac{3}{\infty^2}+\frac{5}{\infty^3}\right)}{\left(3+\frac{4}{\infty}\right)} = \frac{\infty^2 \cdot (1+0+0)}{(3+0)} = \infty //$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+5}{3x^3+4}$ limiti ?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+5}{3x^3+4} = \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{4}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1+\frac{3}{\infty^2}+\frac{5}{\infty^3}}{3+\frac{4}{\infty^3}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3} //$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{3x+1}$ limiti ?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{3x+1} = \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{|x| . \sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{x . \left(3+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{4+0}}{3+0} = \frac{2}{3} //$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{4+0}}{3+0} = -\frac{2}{3} //$$

5. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{5-x}$ limit ?

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{5-x} = \infty //$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{5-x} = -\infty //$$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ limit ?

$$\lim_{x \to \infty^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \,//$$

$$\lim_{x \to \infty^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\frac{x^2}{\cancel{x^2}}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-1-0}} = -1 \,//$$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3-x^2-3x)$ limiti ?

$$\lim_{x \to \infty} (x^3-x^2-3x) = x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$= x^3 \cdot \left(1-\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}\right) = x^3 \cdot (1-0-0)$$

$$= x^3 = \infty \,//$$

8. $\lim_{x \to \infty} \frac{1+2e^x}{1-e^x}$ limiti ?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+2.e^x}{1-e^x} = \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}+2\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)} = \frac{0+2}{0-1} = -2 \,//$$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{1+2e^x}{1-e^x} = \frac{3}{0} = \infty \,//$

10. $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x$ limit ?

$$\lim_{x \to \infty^+} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} \,//$$

$$\lim_{x \to \infty^-} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \,//$$

KeskinColor

Kaynaklar:

- http://www.acikders.org.tr/pluginfile.php/480/mod_resource/content/0/hafta_24.pdf

-http://uzunincebiryolculuk.files.wordpress.com/2009/07/limit-sureklilik-turev.pdf

-http://www.cemyildirim.com/maltepe/notlar/2_donem/mat2.pdf

-http://www.sosmath.com/calculus/limcon/limcon04/limcon04.html

-http://cims.nyu.edu/~kiryl/Calculus/Section_1.6--Limits_Involving_Infinity/Limits_Involving_Infinity.pdf